

La didattica della didattica della matematica: esperienze personali e spunti critici di discussione e ricerca

Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla

NRD – Bologna

Mescud – Bogotá

Sunto. La nascita della teoria che oggi porta il nome di “didattica della matematica” (ddm), declinato e tradotto nei vari Paesi in molti modi diversi, ha permesso alla comunità degli studiosi di essa di compiere incredibili ed inaspettati passi nella direzione di una ricerca sempre più dettagliata, approfondita e variegata. Tanto che la “teoria” è divenuta “disciplina” e, come tale, si insegna nelle università e nei corsi di formazione per insegnanti di matematica in servizio. Riteniamo che si possa già parlare di quasi tre decenni di insegnamento della ddm. La ovvia conclusione è che, a nostro avviso, si possa cominciare a riflettere, nella nostra comunità, sulla didattica di questa disciplina, cioè della “didattica della ddm”, per come si presenta in modo concreto, per quali problematiche teoriche essa comporta e che tipo di ricerca si sta sviluppando al suo riguardo. Il presente testo vuol essere nulla più che un contributo in questa direzione.

Abstract. The birth of the theory that now bears the name of “mathematics education” (ddm), developed and applied in many diverse ways in different countries, has enabled the community of scholars to make astonishing and unexpected steps in the direction of research ever more detailed, in depth and varied. In this way, “theory” has become “discipline”, and, as such, is taught in universities and training courses for in service mathematics teachers. We believe that we can already speak of almost three decades of teaching mathematics education. In our opinion, the obvious conclusion is that within our community we can begin to reflect on the didactic of this discipline, on the “didactic of ddm”, in terms of its concrete characteristics, of the theoretical problems it entails and of the type of research that is being developed in this respect. This text is intended as nothing more than a contribution in this direction.

La didattica della didattica della matematica: esperienze personali e spunti critici di discussione e ricerca

Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla

NRD – Bologna Mescud – Bogotà

1. La base delle richieste e delle offerte di corsi di didattica della matematica

Le richieste ufficiali di corsi di didattica della matematica (ddm) provengono principalmente da due tipologie di sedi istituzionali, le università (U) e le sedi scolastiche (S).

U. L'università richiede questo tipo di corsi soprattutto in vista della formazione dei futuri docenti di matematica nei seguenti livelli scolastici: scuola dell'infanzia, scuola primaria, scuola secondaria di I e II grado.

Nel primo caso si tratta di corsi all'interno delle facoltà di scienza della formazione, nei corsi di laurea in scienze della formazione primaria; negli altri due casi, terminato il corso di laurea di I livello (attualmente 3 anni) in matematica, si passa a corsi biennali di lauree magistrali specifiche, una delle quali prevede appunto la formazione degli insegnanti di matematica per la scuola secondaria. A seconda dei casi e degli accordi, questi corsi prevedono numeri molto diversi di ore di docenza. In questo momento si sta assistendo ad un cambio radicale che però ancora non si può commentare, mancando ogni dato oggettivo.

Eviteremo qui di affrontare i temi più specifici relativi a corsi di ddm per futuri insegnanti di scuola dell'infanzia, di dottorati di ricerca in ddm e di post-dottorati di ricerca in ddm, che pure sono presenti, non troppo in Italia, ma in quasi tutti i Paesi del mondo; essi pongono problematiche del tutto diverse da quelle qui prese in esame: i corsi di formazione di insegnanti di scuola dell'infanzia, per la particolarità del contenuto "matematico" che l'insegnante si trova a dover gestire; i corsi di dottorato e post, per la peculiarità

specifica del rapporto che si viene a creare fra docente, allievo e Sapere.

S. Anche istituti comprensivi, reti di scuole o gruppi di insegnanti e dirigenti sollecitano e chiedono esplicitamente corsi di formazione sulla ddm per i docenti di matematica in servizio. Di solito non si tratta di decine di ore, come accade presso le università, ma di interventi più brevi che non superano normalmente le 6-8 ore (per lo meno, questa è la nostra esperienza). Le richieste che ci vengono rivolte di solito non citano esplicitamente la ddm, ma sono assai variegata: vaghi corsi di matematica, sull'insegnamento della matematica, della logica, sul laboratorio, sulla difficoltà della risoluzione dei problemi etc.; essi finiscono sempre con il ricadere (per nostra scelta o nostra imposizione) in corsi di base di formazione in ddm.

Sia nei casi U che in quelli S, non si può fare a meno, anche per motivi che pian piano mostreremo, di evitare di parlare solo di ddm, ma si rende necessario affrontare tematiche di matematica (ai diversi livelli), di storia ed epistemologia della matematica, qualche volta anche di didattica generale. Nei corsi di formazione dei docenti in servizio nella scuola secondaria (S) o dei futuri docenti in formazione (U) in ddm si rilevano infatti manchevolezze a volte notevoli in matematica; per cui la richiesta di ddm passa in secondo piano; a nostro avviso, infatti:

non si può parlare di didattica di X a chi non conosce X.

Questa perentoria affermazione, che comporta una scelta (per noi) ragionevolmente assiomatica, non è da tutti condivisa, ma resta (per noi) alla base dell'azione didattica.

2. Il triangolo della didattica come schema di situazione

Usiamo il ben noto schema del “triangolo della ddm” per descrivere la nuova situazione: didattica della ddm; tale classico schema, i suoi vertici, i suoi lati vanno interpretati nella nuova situazione specifica, semplicemente generalizzando, ampliando e modificando

in modo opportuno quanto già descritto in D'Amore e Fandiño Pinilla (2002).

Un vertice rappresenta il Sapere che, in questo caso, non è più la matematica ma la ddm;

un secondo vertice rappresenta l'allievo che ha due tipologie fondamentalmente distinte a seconda che si tratti del caso U o del caso S: dovremo esaminare separatamente i due casi;

un terzo e ultimo vertice rappresenta il docente (del corso di didattica della ddm).

I passaggi più volte esplorati: dal Sapere al sapere da insegnare al sapere insegnato al sapere appreso (Fandiño Pinilla, 2002), continuano a valere, pur con le drastiche modificazioni del caso;

lo stesso vale per ciò che riguarda l'idea di trasposizione didattica e di ingegneria didattica (stessa citazione di base).

Una breve indagine schematica preliminare assai ingenua, prima di iniziare l'analisi dettagliata.

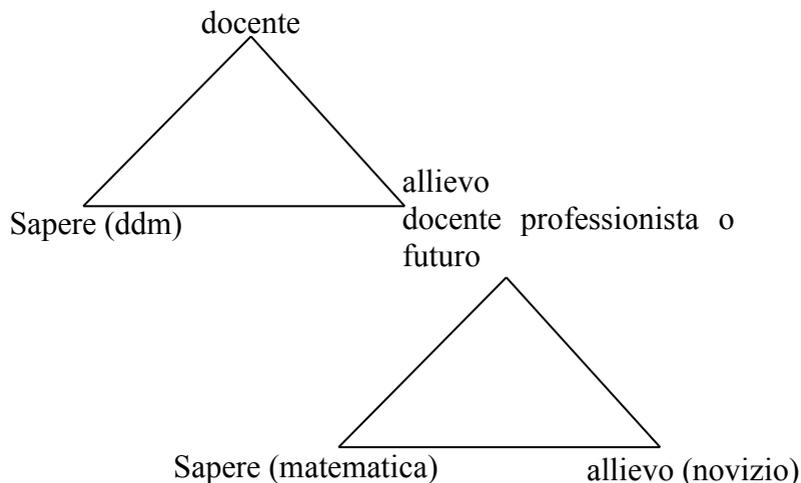
Nel classico triangolo della ddm, il Sapere è il sapere matematico creato dalla ricerca, dalla storia, nel corso dei millenni; da quello attinge il docente nella sua formazione, si suppone che l'abbia fatto o che lo sappia e voglia fare; ma poi, con una opportuna trasposizione didattica, sceglie qual è il sapere da insegnare all'allievo, e glielo insegna affinché questi lo impari. Fortunatamente, c'è una sorta di accordo istituzionale su quale sia il sapere matematico che il docente deve insegnare (ai vari livelli, scolastici e universitari) e che l'allievo deve apprendere. L'allievo è un novizio che ha come scopo (a volte solo ideale) quello di apprendere la matematica che l'insegnante gli insegna. Lo scopo del sapere matematico appreso dagli allievi è di tipo culturale di base generale (saperi matematici irrinunciabili per futuri cittadini, indipendentemente dalla professione futura) o specifici (saperi matematici necessari ad una determinata attività o professione).

Nel (nuovo) triangolo della didattica della ddm:

il Sapere è il sapere di ddm che è stato creato dalla ricerca, dalla storia, nel corso dei pochi decenni da cui esiste la ddm;

da questo Sapere il docente attinge nella sua formazione, si suppone che l'abbia fatto o che lo sappia e voglia fare; ma poi, con una opportuna trasposizione didattica, sceglie qual è il sapere da insegnare all'allievo, e glielo insegna affinché questi lo impari; sfortunatamente, non c'è affatto una sorta di accordo, né interpersonale, né istituzionale, su quale sia il sapere che il docente deve insegnare (ai suoi allievi docenti in formazione iniziale o in servizio) e che l'allievo deve apprendere; crediamo che ciò sia dovuto al fatto che ogni docente si sente libero di interpretare la dizione "ddm" in modo assai personale, talvolta disinteressandosi dei suoi contenuti, stabiliti dalla ricerca; alcuni docenti non riconoscono alla ddm uno statuto disciplinare specifico, qualcuno addirittura ne ignora l'esistenza, confondendolo con: prassi euristica, buon senso, metodo, pedagogia e chi più ne ha, più ne metta;

l'allievo in questo caso non è affatto un novizio, anzi è un professionista, in formazione o in servizio, che ha o dovrebbe già avere conoscenze matematiche ed il suo essere allievo è legato alla sua professione, futura o presente; il suo scopo ideale è quello di apprendere la ddm che il docente gli insegna; lo scopo del sapere di ddm appreso da questi allievi è di tipo applicativo: essi dovrebbero farne uso nella loro professione di docenti di matematica, arricchendo la propria professionalità per avere maggiore successo apprenditivo da parte dei loro allievi (in matematica); cioè: esiste una differenza enorme fra il senso che ha per un novizio, nel triangolo classico della ddm, apprendere la matematica, e, per un allievo docente in formazione iniziale o in servizio, nel nuovo triangolo della didattica della ddm, apprendere la ddm; c'è da dire, però, come ribadiremo, che l'allievo futuro docente, nel suo apprendimento della ddm, il più delle volte considera i contenuti della ddm non come ferramenta concrete, utili nel suo futuro professionale, ma come oggetti di apprendimento necessari a superare un esame, il che vanifica in larga misura lo sforzo del docente di didattica della ddm.



3. L'allievo

Affrontiamo la problematica della tipologia dell'allievo. Distinguiamo *in primis* i due casi, nell'ordine U e S; nel caso U, distinguiamo UP (formazione universitaria per futuri docenti di scuola primaria) da US (formazione universitaria per futuri docenti di scuola secondaria).

UP. Nel caso di studente in formazione iniziale per diventare insegnante di scuola primaria, vanno distinti due casi che si presentano come fondamentali:

UP1 studenti universitari che seguono un solo corso di ddm di fatto obbligatorio;

UP2 studenti universitari che scelgono di loro spontanea volontà come opzionale un corso di ddm (di solito si tratta di seguire il corso obbligatorio e poi porre un altro corso di ddm come scelta personale; non sempre questa scelta è dovuta ad una reale convinzione personale, ma lo è il più delle volte).

Va anche detto subito che, nella maggior parte dei casi, tutti questi corsi di ddm sono preceduti da un corso di matematica; o, come capita ultimamente, nel primo corso obbligatorio (60 ore) confluiscono le due discipline: matematica e ddm.

Le reazioni sono spesso assai diverse; nonostante le esplicite dichiarazioni di interesse e talvolta di sorpresa espresse dagli studenti di UP1 di fronte ad una disciplina che si presenta assai diversa da come appariva relegata nei ricordi di studente pre-universitario, sembra permanere una certa diffidenza non tanto nei riguardi del docente o della disciplina, quanto in sé stessi e in una non ben chiarita ma dichiarata incapacità di affrontarne le tematiche. Si potrebbe approfondire, ma ci limitiamo a citare Zan (2007).

Difficilmente uno studente che si trova nella fascia UP1 cambia idea e passa nella UP2, abbiamo solo casi sporadici statisticamente irrilevanti.

Ma il viceversa, passare dalla fascia UP2 alla UP1 non si dà mai; lo studente che ritiene di essere adeguato per la matematica compie a priori l'opzione UP2 e non ritorna sui suoi passi.

Le molte richieste di tesi di laurea in ddm avvengono tutte in UP2.

La percezione di personale inadeguatezza degli studenti nei riguardi della matematica, ampiamente studiata (Zan, 2007), non sempre è suffragata da obiettivi riscontri; così come il viceversa: la supposta adeguatezza e la supposta preparazione, spesso mostrano che la realtà è ben diversa ed anche studenti del tipo UP2 devono essere riqualficati in matematica, prima di poter accedere significativamente alla ddm.

Le misconcezioni che la scuola pre-universitaria produce in matematica il più delle volte non sono percepite da chi le possiede ed anzi sono considerate punti di forza in quanto appaiono spesso come norme di comportamento, regole, schemi spesso sbagliati ma percepiti come corretti e doverosi (si deve fare così, si deve mettere l'uguale, si deve disegnare così, questa è la regola, si deve mettere l'archetto qui, ...) (Martini, Sbaragli, 2005; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sbaragli, 2008; Sbaragli, 2012).

In casi di questo tipo, assai frequenti, la metodologia di insegnamento ha un grande rilievo: bisogna mettere lo studente del corso UP2 di fronte alle proprie misconcezioni, per esempio grazie a lavori personali di analisi o in piccolo gruppo che, si sa, producono sessioni piuttosto profonde di analisi di sé stessi in situazione (Dozza, 2006; Ellerani, 2012).

US. Diversa è la situazione dei corsi per futuri insegnanti di scuola secondaria, molto diversa nei vari Paesi del mondo, ed in via di ridefinizione in Italia, in questo periodo. A prima vista, sembrerebbe ingenuamente di poter ammettere che studenti in formazione come insegnanti di matematica nella scuola secondaria, laureati in matematica, non debbano necessitare di una formazione matematica. Ma non è così. Spesso, proprio i corsi di ddm, per la riflessione critica e specifica alla quale obbligano, rimettono in discussione convinzioni profonde sulla matematica e sui suoi elementi, rivelando vuoti e incertezze che devono essere colmati e risolte, prima dell'ingresso in aula come docenti (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2004). Così, i corsi di storia ed epistemologia della matematica che spesso accompagnano quelli di ddm si rivelano straordinariamente efficaci proprio anche per colmare lacune in matematica (D'Amore, 2004).

S. La formazione in servizio, di solito, non viene richiesta solo per gli insegnanti di matematica (o prevalente in matematica), ma spesso anche per gli insegnanti delle altre discipline.

Per analizzare la situazione bisogna partire da quelle che sono le attese preliminari, prima cioè dell'effettuazione del corso.

Le nostre inchieste, dal sapore assai concreto e ingenuo e non ancora scientifico, mostrano che l'insegnante si aspetta dal corso quel che segue: "ricette" (che cosa insegnare, come e quando), suggerimenti specifici di attività (al momento della richiesta si insiste sempre molto sul fatto che il corso deve essere "concreto" e a carattere laboratoriale), presentazione di strumenti (che vanno da artefatti concreti a metodologie di insegnamento), schemi di comportamento e di analisi, regole per l'insegnamento, criteri di

valutazione specie in riferimento alle varie prove nazionali ed internazionali di questi ultimi anni, organizzazione curricolare; in vari casi ci è stato rivelato che ci si aspetta la denuncia degli errori che gli insegnanti commettono a scuola, la panacea per non commetterli più, che cosa gli insegnanti *devono* far fare ai bambini (come insegnare le tabelline, le operazioni in colonna, come scrivere i singoli passaggi delle operazioni ecc.).

Di fronte a queste attese, le reazioni al nostro corso sono molteplici, ma di tipologie assai più ristrette, meno dispersive; per capirle, va subito detto che il nostro corso standard (del quale ripareremo più avanti) prevede: elementi di base della didattica tratti dalla teoria delle situazioni con annessi e connessi (per esempio il contratto didattico); immagini e modelli, modelli intuitivi e relative questioni messe in evidenza da Fischbein; analisi dei modelli delle operazioni tirando in ballo anche esempi di Vergnaud; misconcezioni, difficoltà, teoria degli ostacoli; riflessioni sulla presenza della semiotica e difficoltà di gestirla da parte dello studente; ma, a tutto questo, bisogna aggiungere continue e varie riflessioni sulla matematica più che sulla sua didattica, specie quando si parla di aritmetica [per esempio, nella scuola primaria, sistema posizionale, numeri razionali (in particolare le frazioni che costituiscono sempre una problematica assai forte)], elementi di geometria di base ecc. Quando c'è tempo sufficiente, il nostro testo implicito di riferimento in ddm è D'Amore, 1999; quando non c'è tempo, è l'assai più snello D'Amore e Sbaragli, 2011; i testi di matematica cui facciamo implicito riferimento sono diversi, ma soprattutto Fandiño Pinilla e Sbaragli, 2011, e Fandiño Pinilla, 2005, insieme ad altri; ma ritorneremo sull'argomento del contenuto dei corsi in modo più esplicito.

La reazione tipica, la più diffusa, è una reazione di piacevole stupore e di accettazione gradita; la concretezza della nostra scelta di contenuti viene fortemente avvertita.

Quel che ci lascia sconcertati è il fatto seguente: questo genere di questioni, il contratto didattico, per esempio, è stato reso esplicito fin dagli anni '60, mezzo secolo fa; è stato oggetto di studi e

ricerche fin dai primi anni '80 ma anche di revisioni recenti (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sarrazy, 2010); se ne è scritto in migliaia di articoli, anche su riviste a larga diffusione fra gli insegnanti, oggetto di relazioni in convegni per insegnanti, libri che hanno venduto migliaia di copie; eppure, l'argomento è del tutto nuovo per la totalità degli insegnanti ai quali si presenta.

Questo fatto, interessante e stimolante per la ricerca futura, va preso in serio esame. Perché professionisti come medici, avvocati e ingegneri sono immediatamente resi consapevoli dei progressi delle loro professioni, mentre i professionisti dell'educazione restano relegati a pseudo-ricette che datano molti decenni e nemmeno fanno delle critiche impietose e corrette che sono state rivolte loro da seri ed esperti ricercatori? Nessun medico oggi applicherebbe sanguisughe al corpo di un paziente anemico, ma questa "cura" è andata avanti per secoli, fino a che è stata superata e dichiarata inutile e anzi dannosa. Mentre nell'azione di insegnamento, alcune sanguisughe, che la ricerca ha indicato come inutili e anzi dannose resistono e non sono rigettate.

Molti docenti ancora si intestardiscono a discutere della efficacia di strumenti artificiali ideati negli anni '60 per insegnare, materiali "strutturati", quando il vero problema è l'apprendimento e non tanto e non solo l'insegnamento. Questi strumenti non sono di per sé necessariamente negativi, lo diventano quando sono l'oggetto di una esagerazione acritica che li vuole panacee didattiche in grado di risolvere tutti i problemi.

I docenti di discipline diverse che seguono il corso di ddm sono per lo più prevenuti nei confronti della matematica e di tutto quanto la riguarda e dunque sono spesso entusiasti di aver capito, a fine corso, il messaggio e in quasi tutte le occasioni sono estremamente espliciti nel riconoscere che molti degli argomenti che hanno appreso non sono solo specifici della ddm ma riguardano o possono anche riguardare la loro disciplina di insegnamento.

Un caso speciale riguarda i corsi master di ddm nelle università, post laurea. Siamo stati e siamo docenti in corsi master o magistrali in diversi Paesi: Italia, Spagna, Cipro, Grecia, Messico, Colombia ed altri. Lo studente del master può essere uno studente già laureato in matematica che desidera avviarsi alla professione di docente di matematica nella scuola secondaria (Italia, Spagna, Cipro, Grecia, per esempio) o è già docente di matematica di scuola secondaria o di università e vuole raggiungere il titolo per accedere a più alti gradi professionali o semplicemente per passione e serietà professionale (Messico e Colombia, per esempio).

In ogni caso, si tratta di una scelta personale che connota in modo specifico l'allievo e lo spinge ad una serietà che non ha paragoni con altri casi descritti in precedenza. Ciò non toglie che, in molti casi, lacune matematiche si siano manifestate ed abbiamo avuto bisogno di veri e propri approfondimenti in matematica, piuttosto che in ddm. L'allievo in questo caso è assai ricettivo, molto disponibile ad impegni anche seri e pesanti, per esempio di studio personale e di lavori extra.

4. Il docente

Corsi vagamente o strettamente assimilabili a quelli che stiamo qui descrivendo sono tenuti da una variegata tipologia di docenti o "esperti".

I. Docente esperto in ddm per come l'abbiamo presentata in 3. (quella che in D'Amore, 1999, è chiamata epistemologia dell'apprendimento della matematica e che si riferisce alla problematica dell'apprendimento da parte dell'allievo; essa fa esplicito riferimento almeno iniziale per motivi cronologici alla cosiddetta "scuola francese"); questa tipologia di docente appartiene alla categoria dei matematici universitari che hanno dunque una indiscutibile preparazione anche in matematica e, avendo esperienza in corsi per docenti di scuola primaria e secondaria, capiscono e prendono in seria considerazione le

richieste talvolta apparentemente ingenuie degli allievi-docenti (in formazione o in servizio).

II. Docente esperto in matematica o in ddm intesa però come *Ars docendi* (sempre D'Amore, 1999) dunque nella problematica dell'insegnamento; talvolta qui "matematica" va intesa nel senso di "matematiche elementari" o "divulgazione della matematica"; spesso docenti di questo tipo non capiscono la cogenza delle richieste dei docenti di scuola primaria o secondaria (in formazione o in servizio) che frequentano il corso, o le reputano troppo banali, sottostimandole; di fatto la mancata conoscenza della ddm non offre loro appigli scientifici per una risposta seria; se decidono di rispondere, vanno a buon senso o basandosi su esperienze legate ai propri figli o analoghi. Di fatto, i docenti di questa tipologia non trattano, nei loro corsi, la ddm, anche se il corso porta questa denominazione.

III. Docente esperto in matematica che offre corsi di matematica, o di storia, o di logica, o di matematiche elementari da un punto di vista superiore, o di complementi di matematica, o di divulgazione della matematica ... ad allievi docenti di matematica (in formazione o in servizio).

IV. Docente di scuola primaria o secondaria non esperto né in matematica né in ddm, ma con esperienza pluriennale come docente; per esempio, fanno parte di questa categoria quegli insegnanti che hanno creato strumenti, marchingegni e manufatti vari per l'insegnamento di certi aspetti della matematica; di solito promettono miracoli e di solito, a fronte di un grande interesse iniziale, lasciano la stessa situazione che hanno trovato; alle richieste di qualsiasi tipo da parte degli allievi-docenti hanno sempre una risposta pronta ma non suffragata scientificamente. Sulla conoscenza matematica, poi, spesso sono poco attendibili.

Stante la scarsità dei docenti del I tipo in Italia, si hanno corsi di tipo U tenuti da docenti del II o del III tipo; ovviamente lo studente, in quanto tale, non sa dell'equivoco epistemologico nel quale è caduto e, dato che i corsi hanno tutti lo stesso nome (ddm), finisce con il credere che il contenuto della ddm sia quello che sta ricevendo e non quel che dovrebbe essere stante la denominazione.

Per lo stesso motivo, nei corsi di tipo S abbondano docenti non del I tipo e l'insegnante che frequenta il corso non sa, alla fine, che esiste una ddm e la fa coincidere con quel che ha ascoltato.

Un'analisi scientifica futura più dettagliata ci pare necessaria, a questo punto, perché la confusione regna sovrana. Mentre in un corso universitario di algebra elementare si sa con elevata certezza quale sarà il contenuto atteso (gruppi, morfismi, anelli, il campo dei numeri complessi, ideali e anelli quozienti, anelli euclidei, polinomi, estensioni, o cose simili, più o meno), in un corso universitario di ddm si ha la più variegata delle casualità, dipendendo dalla tipologia del docente che si incontrerà e dalle sue scelte.

Del tutto analoga la situazione dei corsi S per docenti in servizio nei quali, a complicare le cose, può apparire come docente la tipologia IV. Manca la consapevolezza critica di questa situazione anche fra i dirigenti scolastici e non solo fra gli insegnanti.

Nella nostra esperienza, abbiamo fatto fin dall'inizio la scelta di insegnare, sia nei corsi universitari destinati a insegnanti in formazione iniziale, sia nei corsi per insegnanti in servizio, la ddm delineata in precedenza, quella che chiamiamo "epistemologia dell'apprendimento della matematica", partendo dalla teoria delle situazioni per motivi fondazionali e cronologici, distinguendo fortemente il livello scolastico nel quale i futuri docenti ed i docenti in servizio si trovano o si troveranno ad agire come professionisti dell'educazione; ed abbiamo sempre puntato molto su esempi concreti di insegnamento - apprendimento, facendo riferimento a tematiche matematiche che sappiamo portare con sé specifiche difficoltà di apprendimento. In alcuni casi abbiamo preparato specificamente docenti non universitari in matematica ed in ddm

per poter dare corsi a insegnanti in servizio e condurre laboratori nei corsi universitari per insegnanti in formazione iniziale.

5. Il Sapere

Non vogliamo assumerci la responsabilità di asserire quale sia un “vero” o “corretto” contenuto di ddm per poterlo porre come base costitutiva del Sapere nel triangolo della didattica della ddm; ci pare però che vi siano esempi di una tal variabilità da apparire eccessiva. Un accordo su questo punto potrebbe essere opportuno, ma dovrebbe essere basato sui risultati della ricerca.

Come abbiamo avuto già modo di dire, il Sapere cui si sta facendo riferimento, a seconda di chi è il docente, può contenere:

matematica, il più delle volte connessa con quella che il docente (futuro o attuale) dovrà insegnare nella propria classe; ma non è detto, abbiamo molti esempi contrari: a volte si insegna nei corsi per insegnanti una matematica che, pur rivestendo interesse culturale, nulla ha a che vedere con le tematiche che costituiscono i contenuti dell'attività in aula;

matematica elementare, cioè una rivisitazione della matematica in chiave storica ed epistemologica che è assai utile per capire meglio la matematica, ma che matematica resta; a questa vogliamo ascrivere, forzando solo un poco la mano, la divulgazione della matematica (questo tema tornerà fra breve);

problematiche riguardanti l'insegnamento della matematica, revisioni o proposte curriculari, analisi dei contenuti di indicazioni e programmi, strumenti per l'insegnamento, insomma quel che in D'Amore (1999) si chiama didattica A, nel senso di *Ars docendi*;

problematiche più precisamente riguardanti l'apprendimento della matematica o il suo mancato apprendimento, sulle quali ci siamo dilungati in precedenza; la possiamo chiamare epistemologia dell'apprendimento della matematica o, seguendo D'Amore (1999),

didattica B, nel senso che ha storicamente fatto seguito alla A, a partire dai primi anni '80;

discorsi generici o di carattere generale che nemmeno citano la matematica e la sua didattica per come la intendiamo noi.

Alcune varianti che appaiono nei corsi per insegnanti in formazione iniziale o in servizio sono le seguenti:

la divulgazione matematica, specie per quanto riguarda corsi per insegnanti in servizio di scuola secondaria; con questa scelta si intende suggerire comportamenti di insegnamento-apprendimento che diano senso alla matematica che lo studente deve (dovrebbe) apprendere; per esempio per mostrare dove si trova la matematica che gli studenti studiano, o ambiti nei quali si applicano gli argomenti oggetti di studio;

argomenti di cultura sì matematica ma in campi extramatematici, come l'arte figurativa, la letteratura, la poesia, il cinema, il teatro, per offrire all'insegnante, specie di scuola secondaria, appigli per riconquistare l'interesse di quegli studenti che si discostano con rancore dalla nostra disciplina, non riconoscendola in quelle altre che dichiarano di amare di più;

argomenti di storia ed epistemologia della matematica per spiegare il senso profondo che ha la matematica, nella sua evoluzione storico-critica, sempre privilegiando la scuola secondaria sia per le sue peculiarità, sia perché le difficoltà e il disamore verso la matematica si sviluppano e si acuiscono nell'adolescenza (dai 15 anni in poi) e non nella fanciullezza.

Per tutto quanto condensato nelle poche righe di questo paragrafo, noi restiamo convinti della ottima scelta di contenuti che, almeno sulla carta, determinava le vecchie SSIS (scuole di specializzazione per l'insegnamento secondario) per la formazione degli insegnanti di scuola secondaria; naturalmente, essendo un corso a carattere universitario post laurea, la tipologia del docente poteva essere I o II o III.

6. La trasposizione didattica; il sapere appreso e il suo uso professionale

Determinato il contenuto del vertice Sapere del nostro nuovo triangolo della didattica della ddm, resta da fissare che cosa significhi, in questo caso, trasposizione didattica. Sembrerà ingenuo, ma a noi sembra che, in prima istanza, non sia molto dissimile dall'analogo e ben noto relativo al classico triangolo della ddm; ma si dovrà indagare meglio e in modo più scientifico.

Nel caso dei corsi universitari per la formazione dei futuri insegnanti di scuola primaria, si deve tener conto che, per quanto riguarda il sapere matematico a disposizione, non ci si può fidare di supposte conoscenze degli allievi in matematica perché l'esperienza mostra che così non è; l'obsolescenza matematica evidenziata da tanti ricercatori colpisce lo studente alla fine della scuola secondaria superiore: quel che egli ricorda, se ricorda qualcosa, è quanto ha appreso (non sempre in modo appropriato) nella scuola primaria, della secondaria restano solo vaghe ed imprecise parole che non hanno sostanza di contenuti. Per questo approviamo il fatto che, nei corsi universitari di formazione dei futuri insegnanti di scuola primaria, sia previsto ampio spazio per richiamare varie nozioni di base di matematica. Ciò non toglie che auspichiamo che il docente universitario che ha il compito di svolgere il corso di ddm, tratti davvero argomenti di ddm, cioè compia una trasposizione didattica dal Sapere di ddm che la comunità, la storia, la ricerca ha creato, per trasformarlo in un sapere da insegnare ai suoi allievi, insegnanti in formazione iniziale della scuola primaria.

Nel caso dei corsi universitari per la formazione dei futuri insegnanti di scuola secondaria cambia poco, se non che questi allievi sono laureati in matematica o per lo meno hanno condotto studi universitari di matematica, e che insegneranno nella scuola secondaria. Invece che insegnare a fare operazioni in colonna o a calcolare aree di trapezi, dovranno insegnare il teorema di Pitagora, le derivate, a dimostrare i teoremi di Euclide e determinare l'equazione della parabola. Non cambia molto: si deve accertare la

competenza matematica, anche grazie alla storia ed all'epistemologia, ma poi tenere corsi denominati ddm che contengano davvero la ddm che, per questi insegnanti, sarà davvero uno strumento utile, irrinunciabile, per avere successo apprenditivo in aula. Il docente universitario cui è affidato il compito di trattare il corso di ddm dovrebbe compiere una trasposizione didattica molto efficace, pensando ad un sapere da insegnare pieno di riferimenti reali all'aula, in modo che, alla fine, il sapere (di ddm) appreso dai suoi allievi costituisca uno strumento professionale prezioso.

Nel caso dei corsi di formazione in servizio per insegnanti di matematica, si deve tener conto del fatto che sono parecchi gli insegnanti che conoscono (bene) quel che insegnano. Tuttavia sono presenti insegnanti di scuola primaria che confessano di non aver mai seguito veri e propri corsi di matematica nella loro preparazione docente; e docenti di scuola secondaria che dichiarano esplicitamente di aver perso per strada i contenuti appresi nei corsi universitari (fatto già denunciato da Felix Klein che dichiarava inutile la “parentesi universitaria” per i futuri insegnanti di matematica). Alcuni insegnanti di scuola primaria confessano che il loro Sapere di riferimento è né più né meno quello che insegnano. Alcuni di essi, poi, dichiarano di non conoscere la storia della disciplina, di ignorare che essa abbia una sua epistemologia. Il che comporta che alcuni insegnanti si trincerino dietro meccanismi formali ai quali riducono la matematica insegnata e pretesa, essendo dunque disarmati di fronte alle richieste degli studenti in difficoltà.

7. La ricerca in aula

La nascita dei nuclei di ricerca didattica (NRD) presso i dipartimenti di matematica delle università italiane ha molto favorito le relazioni fra mondo universitario della ricerca e attività d'aula, chiarendo al ricercatore quali siano le problematiche care agli insegnanti; anzi, ha permesso a vari insegnanti (di tutti i livelli scolastici), i più sensibili e preparati, l'ingresso nel mondo della ricerca. Nel caso del NRD di Bologna, poi, si creò fin dagli anni '80 un gruppo specifico di insegnanti (gruppo di ricerca e sperimentazione in didattica e divulgazione della matematica, RSDDM) che raccoglieva quegli insegnanti che, in luogo di voler fare ricerca, desiderassero compiere sperimentazioni scientificamente controllate, ed apprendere l'abc della divulgazione.

La ricerca nazionale ha rapidamente dato i suoi frutti, in tutta Italia, facendo avanzare in campo internazionale una sorta di scuola italiana della ricerca in ddm; il ruolo degli insegnanti di scuola nella ricerca si è rivelato assai decisivo, per evitare quel che è successo in certi Paesi, nei quali la ricerca è rimasta svincolata dalla realtà scolastica; le sperimentazioni (che spesso fanno seguito a ricerche) hanno portato a convinzioni che oramai percorrono tutta la Penisola creando esempi di buone pratiche (Sbaragli, 2011).

Le pubblicazioni di ricerca e di sperimentazione, le riviste, i libri, i convegni, i seminari, le occasioni di incontro e discussione sono oramai centinaia all'anno; non coprono le esigenze, come abbiamo detto, ma sono onestamente parecchie. Ci sorprende sempre il fatto che, nei corsi per insegnanti in servizio, molti dei presenti dichiarino di non averne mai sentito parlare.

Tanto per fare alcuni esempi che riguardano il nostro gruppo di ricerca e sperimentazione, per rispondere alle richieste degli insegnanti su matematica, storia, epistemologia, cultura e didattica, ci siamo dedicati alla stesura di un intero progetto di insegnamento-apprendimento i cui autori sono per lo più gli stessi insegnanti d'aula che appartengono al gruppo (si veda D'Amore, Fandiño

Pinilla, Sbaragli, 2011); a questo fanno da corollario decine e decine di pubblicazioni considerate come supporto all'insegnante; segnaliamo solo l'ultima in ordine di apparizione: D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, 2013) che tocca lo scottante tema della semiotica in aula.

Il nostro sito (www.dm.unibo.it/rsddm) è assai visitato, sia per le notizie che vengono date sia per i materiali che vi appaiono scaricabili, articoli e sperimentazioni.

Il nostro convegno nazionale annuale di diffusione dei risultati della ricerca, *Incontri con la matematica*, è uno dei più noti e frequentati (oltre al sito precedente, si veda anche www.incontriconlamatematica.org e www.incontriconlamatematica.net).

Tutto ciò dimostra l'intensa volontà di creare ponti fra la ricerca e la vita quotidiana d'aula e dunque, in particolare, la necessità di capire sempre meglio come funziona la didattica della ddm.

8. La presa in esame di una didattica della ddm apre un campo di ricerca

Come abbiamo visto ci sono forti analogie fra i primi elementi appena abbozzati e analizzati della didattica della ddm e la ddm; ma anche profonde differenze. Sottolineiamo alcuni elementi di riflessione che, ovviamente, in alcuni punti ci costringeranno a ripeterci.

Sapere. Certo, il Sapere è fortemente differenziato; in ddm, una volta fissato il livello scolastico di riferimento, più o meno, fatte debite ma minime eccezioni, si sa qual è il Sapere cui si sta facendo riferimento; c'è un Sapere istituzionalizzato al quale il docente sa di poter/dover fare riferimento (si può basare su indicazioni nazionali, programmi, tradizione, accordi fra docenti, ...). Mentre, nella didattica della ddm, il Sapere è variegato assai e una discussione vera fra esperti su tali contenuti non è mai stata realmente avviata.

Allievo. La varietà è enorme, come abbiamo visto, ed i risultati sorprendentemente diversi. Nel triangolo della ddm l'allievo è un giovane apprendista che non sa, che si sa che non sa, che ha il diritto di non sapere, che è in aula non per scelta personale ma per obbligo sociale. Gli studi degli ultimi 40 anni ci hanno fatto conoscere con molta nitidezza quel che questo studente fa, quel che crede di fare o ritiene di *dover* fare. Ma, nel triangolo della didattica della ddm, cambia tutto. L'allievo è adulto, spesso è un professionista che, almeno sulla carta, dovrebbe già sapere: la relazione fra lui ed il Sapere cambia. Se nella ddm lo studente non accede direttamente al Sapere ma solo attraverso la mediazione dell'insegnante, nella didattica della ddm ci dovrebbe essere un accesso diretto, ma non sempre c'è. Perché?

Docente. Nel triangolo della ddm, il docente è più o meno definito, la teoria delle situazioni didattiche ci ha insegnato a definirlo. Sappiamo come funziona in aula e come dovrebbe funzionare, sappiamo quali siano le sue attese, la sua capacità di interpretare le cose. Da qualche tempo abbiamo imparato a valutare l'influenza che hanno le sue convinzioni personali sul proprio insegnamento e dunque sull'apprendimento dei suoi allievi, come molte ricerche hanno mostrato (citiamo solo D'Amore, 2004, 2006, D'Amore, Fandiño Pinilla, 2004). Ma nel triangolo della didattica della ddm il docente è un personaggio multiforme, ancor tutto da studiare.

Trasposizione didattica, ingegneria didattica, differenza fra sapere insegnato e sapere appreso, ... e tutti gli altri temi di base, quelli da cui iniziò la nostra avventura di ricercatori (anche se qualcuno tende a dimenticarlo), sono da studiare daccapo in questa nuova ipotesi, vanno capiti e interpretati.

Lo studente di scuola (quello studiato dalla ddm) segue i corsi, arriva all'agognata sufficienza, ma poi dimostra di dimenticare tutto quel che ha "appreso" e che pure aveva appreso, visto che lo ha usato in contesti diversi, in maniera autonoma.

L'insegnante in formazione iniziale segue i corsi, si entusiasma perfino, ma poi dimostra di non volere o sapere applicare, per esempio nelle ore di tirocinio in aula, quel che ha appreso in ddm. Per esempio si innamora quasi sempre della metodologia che vede applicare nelle ore di tirocinio dal suo insegnante tutor, anche quando invece dovrebbe avvertire che c'è una forte discrepanza fra quel che ha appreso durante le ore di ddm e tale metodologia. La stessa cosa spesso vale per la matematica e non solo per la ddm; lo studente – insegnante in formazione iniziale ha appreso nel corso di matematica che una certa immagine è una misconcezione, la vede favorire in aula nelle ore di tirocinio e non se ne rende conto; la "colpa" del successivo fallimento degli studenti viene ascritta all'incapacità dello studente e non all'errore didattico e contenutistico del tutor.

Peggio ancora; lo studente – insegnante in formazione iniziale che segue un corso di ddm, non riesce a considerarne i contenuti come strumenti, come utile ferramenta metodologica che dovrà e potrà usare in futuro per migliorare la sua analisi della situazione d'aula e favorire così l'apprendimento corretto della matematica da parte dei suoi futuri allievi; ma la considera come una disciplina, una materia, dei contenuti da studiare per superare l'esame relativo. Il che comporta, come abbiamo già detto, l'obsolescenza. Quando questo ex insegnante in formazione iniziale sarà finalmente insegnante in servizio non ricorderà nemmeno più quali fossero i contenuti che ha appreso nel corso, così come accadrà per altri corsi che non avevano la pretesa di essere professionalizzanti ma solo culturali.

L'insegnante in servizio che segue un corso di formazione in ddm di solito si entusiasma per i contenuti proposti, perché vi riconosce concretezza: gli esempi proposti sono quegli stessi che lui trova in aula, per lo più finora inesplicabili e che finalmente trovano una

spiegazione logica in termini di “situazione d’aula”, quella studiata dalla ddm. Ma, alla fine del corso, sembra rimuovere quel che ha appreso, riprendendo a comportarsi come faceva prima, nella sua routine quotidiana come insegnante, addossando le colpe agli studenti di tutto quel che non funziona, di ogni differenza fra le sue attese personali e le risposte o i comportamenti ottenuti.

Questi vari atteggiamenti hanno una stessa origine? O sono questioni del tutto diverse? Ce lo dirà la ricerca futura.

Nella teoria delle situazioni classica, che stiamo evidentemente prendendo a modello di base in modo dichiarato ed esplicito, ci sono due temi forti che hanno dominato la scena della costruzione della ddm negli anni '80 e '90, l’idea di noosfera e l’idea di milieu. A partire da due classici testi di Brousseau ai quali si fa sempre riferimento (1986a, b), tali concetti sono poi man mano stati interpretati in modi diversi dai singoli autori.

A proposito di noosfera, ci piace citare due autori di grande prestigio.

Le seguenti parole sono di Yves Chevallard e sono tratte da Chevallard (1988): «Il punto di partenza della nostra analisi (...) può essere riferita allo schema seguente. L’oggetto del discorso sottomesso ad esame è (qui) *il sistema d’insegnamento*. Il discorso stesso è prodotto, non dall’interno del sistema d’insegnamento, ma da un punto situato alla sua periferia, in una zona intermedia tra sistema d’insegnamento e società, che io chiamo la *noosfera* (“la sfera in cui si pensa” - dove si pensa sul sistema d’insegnamento s’intende). È un’area in cui si ritrovano tutti coloro che “s’interessano” al sistema d’insegnamento al di fuori dello stretto compimento dell’atto di insegnamento stesso: insegnanti militanti, membri degli IREM, ricercatori di ogni stile (tra i quali figurano, naturalmente, i didatti)».

Le seguenti parole sono ispirate ad uno scritto di Juan Diaz Godino (1993); secondo il nostro, per noosfera si può intendere il luogo dei dibattiti di idee significative sull’insegnamento, le finalità della

scuola, gli scopi della formazione, le attese della società per quanto attiene scuola e cultura (per esempio i programmi ministeriali); la noosfera è l'intermediario tra il sistema scolastico (e le scelte dell'insegnante) e l'ambiente sociale più esteso (esterno alla scuola); si potrebbe pensare come «la cappa esterna che contiene tutte le persone che nella società pensano ai contenuti ed ai metodi di insegnamento» (Godino, 1993).

Si parla invece di *mezzo* o *ambiente* (in francese: *milieu*) come di quel sottosistema con il quale ha a che fare direttamente l'allievo (materiali, giochi ecc.). Questo *milieu* è all'inizio definito come l'insieme di tutto quel che sull'allievo agisce o su cui l'allievo agisce (Brousseau, 1977). Si può pensare all'interazione tra alunno e *milieu*, in assenza di un concreto coinvolgimento dell'insegnante. A volte il *milieu* è definito sulla base di veri e propri oggetti concreti, a volte vi si aggiunge una intenzione per la quale questi oggetti sono stati scelti, a volte come qualche cosa di stabile, altre come di qualche cosa che si sviluppa e si modifica insieme all'allievo. Pur nella variazione dell'accezione di questo termine, dovuta al processo di sviluppo di tutta la teoria, ce ne appare ugualmente chiara la funzione: esso serve a definire, all'interno del sistema didattico, quella parte legata ad usi specifici a-didattici, predisposti sì dall'insegnante, e dunque con obiettivi didattici, ma senza la presenza necessaria e costante di tali obiettivi (per esempio, senza la partecipazione diretta dell'insegnante).

Una descrizione dell'evoluzione del concetto di *milieu*, si può rintracciare in Perrin-Glorian (1994).

Su noosfera e *milieu* si può fare riferimento ad Artigue, Gras, Laborde, Tavignot (1994) e a D'Amore (1999, 2003). Ma qui sono intesi in senso classico, relativamente cioè alla ddm; come re-interpretare questi concetti in didattica della ddm è, a nostro avviso, problema di ricerca aperto.

9. La formazione autonoma come ricerca sull'insegnamento-apprendimento

In Da Ponte (2009) si narra della formazione in Portogallo di un gruppo autonomo di studio formato da insegnanti di matematica di diversi livelli scolastici per risolvere problemi di carattere didattico contingente e concreto.

Questa è una via sempre più praticata in altri Paesi, studiata nei suoi dettagli funzionali a partire dalla preistoria del cosiddetto "insegnante-ricercatore" di Stenhouse (1975), fino alle analisi assai più fini di Zeichner e Nofke (2001).

In Italia gli esempi analoghi ci sono ma non sono molti; uno assai vicino alla nostra esperienza e di grande impatto ed efficacia è narrato nell'articolo di ricerca Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori, Sbaragli (2006) e poi nel libro di diffusione Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori (2011).

Due ricercatrici universitarie esperte vengono contattate da un gruppo di insegnanti in servizio formatosi spontaneamente con una richiesta assai precisa di tipo didattico (l'insegnamento - apprendimento delle frazioni), e non per un corso generico; il gruppo segue le indicazioni di queste ricercatrici dapprima per quanto concerne lo studio della matematica del tema in oggetto (le frazioni in particolare ed i numeri razionali in generale), poi analizza i casi rilevati dai membri del gruppo stesso e che hanno portato alla necessità del confronto, in seguito accetta consigli sullo studio didattico (inteso nel senso di epistemologia dell'apprendimento matematico) ed infine giunge a redigere un segmento curricolare completo, discusso e concordato, sull'argomento scelto (Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori, 2011).

Per plasmare il gruppo e per testimoniare passo passo il decorso della ricerca, le due ricercatrici universitarie convocate dal gruppo chiedono ai partecipanti di redigere in tempi determinati, lungo il corso dell'attività di studio e ricerca, dei protocolli di autoanalisi del lavoro svolto: una testimonianza sulle proprie convinzioni sui vari argomenti al momento di iniziarne la trattazione, una

testimonianza alla fine, con la messa in evidenza in prima persona delle modifiche riscontrate nelle proprie convinzioni; questo lavoro, ri-redatto dalle ricercatrici e da due membri del gruppo, costituisce indubbiamente un interessante materiale di ricerca utile alla comunità (Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori, Sbaragli, 2006). Purtroppo questo tipo di attività non è diffusa nel nostro Paese; piuttosto che giocare in prima persona le proprie carte professionali, molti insegnanti preferiscono credere e sperare nel corso impartito da altri, come abbiamo visto in precedenza, per poi farne a meno. Naturalmente esistono realtà di gruppi di studio autonomi, sporadici e non sempre intensamente attivi; essi nascono, di solito, dopo un corso che ha particolarmente affascinato i partecipanti.

10. Conclusione

Noi riteniamo di aver posto qui l'accento su una problematica concreta e vitale, finora poco o per nulla esaminata; sappiamo che la ddm è la più avanzata fra le didattiche disciplinari e che anzi ha contribuito alla creazione di una teoria delle didattiche disciplinari (citiamo solo: D'Amore, Fandiño Pinilla, 2007) ed ha creato ponti di grande interesse teorico fra le didattiche disciplinari e la didattica generale (D'Amore, Frabboni, 1996, 2005).

Sappiamo che essa viene presa a modello per la creazione ancora in corso di altre didattiche disciplinari, ma che alcune di esse ancora stentano a decollare come scienze, figuriamoci poi come discipline.¹

Ma nulla deve impedire a chi ha le ali di volare; la nostra ddm è pronta ad affrontare ricerche sempre più sofisticate, la cui realizzazione ci dirà di più, sempre di più, su questo complesso e perciò affascinante mondo.

¹ Sul significato che in questa accezione è attribuibile alla parola "scienza", si può vedere D'Amore (2007), alla voce "scienza", appunto.

Riferimenti bibliografici

- Artigue M., Gras R., Laborde C. & Tavnignot P. (Eds.) (1994), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Brousseau G. (1977); tra il 1970 ed il 1973 Guy Brousseau pubblicò diversi articoli nei quaderni dell'IEM di Bordeaux che avevano il nome di: «Compte-rendu du séminaire de recherches 1971-72 et projets pour 1972-73»; ma poi queste pubblicazioni continuarono fino al 1978. Noi qui ci riferiamo ad una di queste pubblicazioni a uso interno, la numero 18, nella sua versione edita a Barcellona nel 1977.
- Brousseau G. (1986a). La relation didactique : le milieu. Actes de la IVème Ecole d'Été de didactique des mathématiques. 54-68. IREM Paris 7.
- Brousseau G. (1986b). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7, 2, 33-115.
- Campolucci L., Fandiño Pinilla M.I., Maori D. (2011). *Frazioni. Progetto: Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Vol. 8. Bologna: Pitagora.
- Campolucci L., Fandiño Pinilla M.I., Maori D., Sbaragli S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matematica e la sua didattica*. 3, 353-400.
- Chevallard Y. (1988). *Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation*. Irem d'Aix-Marseille, 14.
- D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.

- D'Amore B. (2004). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*. 4, 4-30.
- D'Amore B. (2006). Didattica della matematica "C". In: Sbaragli S. (Ed.) (2006). *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno*. Atti del Convegno Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme (Bo), 23 settembre 2006. Roma: Carocci. 93-96.
- D'Amore B. (2007). Voci per il dizionario: Frabboni F., Wallnöfer G., Belardi N., Wiater W. (Eds.) (2007). *Le parole della pedagogia. Teorie italiane e tedesche a confronto*. Torino: Bollati Boringhieri. Voci: Didattica disciplinare (pagg. 72-75), Formazione in scienze naturali (pagg. 140-142), Formazione in matematica (pagg. 145-147), Scienza (pagg. 335-337). [Esiste una versione in lingua tedesca].
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matemática*. México DF, México. 14, 1, 48-61.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2007). *Le didattiche disciplinari*. Prefazione di Franco Frabboni. Trento: Erickson.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Iori M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Sbaragli S. (Eds.) (2011). *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Progetto di insegnamento-apprendimento della matematica nella scuola primaria, in 14 volumi. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Marazzani I., Sarrazzy B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto"*.

- Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson.
- D'Amore B., Frabboni F. (1996). *Didattica generale e didattiche disciplinari*. Milano: Angeli.
- D'Amore B., Frabboni F. (2005). *Didattica generale e didattica disciplinare*. Milano: Bruno Mondadori.
- D'Amore B., Sbaragli S. (2011). *Principi di base della didattica della matematica. Progetto: Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Vol. 2. Bologna: Pitagora.
- Da Ponte J.P. (2009). Far ricerca sulla nostra pratica: una strategia di formazione e di costruzione della conoscenza professionale. *La matematica e la sua didattica*. 23, 2, 157-189.
- Dozza L. (2006). *Relazioni cooperative a scuola. Il lievito e gli ingredienti*. Trento: Erickson.
- Ellerani P. (2012). La sfida della Didattica: trasformare le classi in contesti di apprendimento continuo per formare competenze e capitale sociale. In: Bolondi G., Fandiño Pinilla M.I. (Eds.) (2012). *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*. Napoli: Edises.
- Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.
- Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.
- Fandiño Pinilla M.I., Sbaragli S. (2011). *Matematica di base per insegnare nella scuola primaria. Progetto: Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Vol. 1. Bologna: Pitagora.
- Godino J. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Cuadrante*. 2, 2, 69-79.
- Martini B., Sbaragli S. (2005). *Insegnare e apprendere la matematica*. Napoli: Tecnodid.

- Perrin-Glorian M.-J. (1994). *Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives*. In: Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavnignot P. (Eds.) (1994), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble, La Pensée Sauvage. 97-147.
- Sbaragli S. (ed.) (2011). *Buone pratiche d'aula*. Bologna: Pitagora.
- Sbaragli S. (2012). Il ruolo delle misconcezione nella didattica della matematica. In: Bolondi G., Fandiño Pinilla M.I. (Eds.) (2012). *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*. Napoli: Edises.
- Stenhouse L. (1975). *An introduction to curriculum research and development*. London: Heineman Educational.
- Zan R. (2007). *Difficoltà in matematica*. Milano: Springer.
- Zeichner K., Nofke S. (2001). Practitioner research. In: Richardson V. (ed.) (2001). *Handbook of research on teaching*. Washington: AERA. 298-330.

Ringraziamenti

Gli autori esprimono pubblicamente il loro ringraziamento agli anonimi referee che hanno evidenziato carenze ed hanno suggerito modifiche alla versione precedente del testo, dando un contributo notevole al miglioramento del lavoro.

Ringraziano anche i colleghi professori Giorgio Bolondi e Silvia Sbaragli per la revisione critica dei contenuti.